Vorlesung 7a

Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz

Teil 1:

Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^2$

(vgl. Buch S. 71)

Zur Erinnerung:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt (auf $\mathbb{R}^1$).

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1)\,da_1\;\varphi(a_2)\,da_2$$

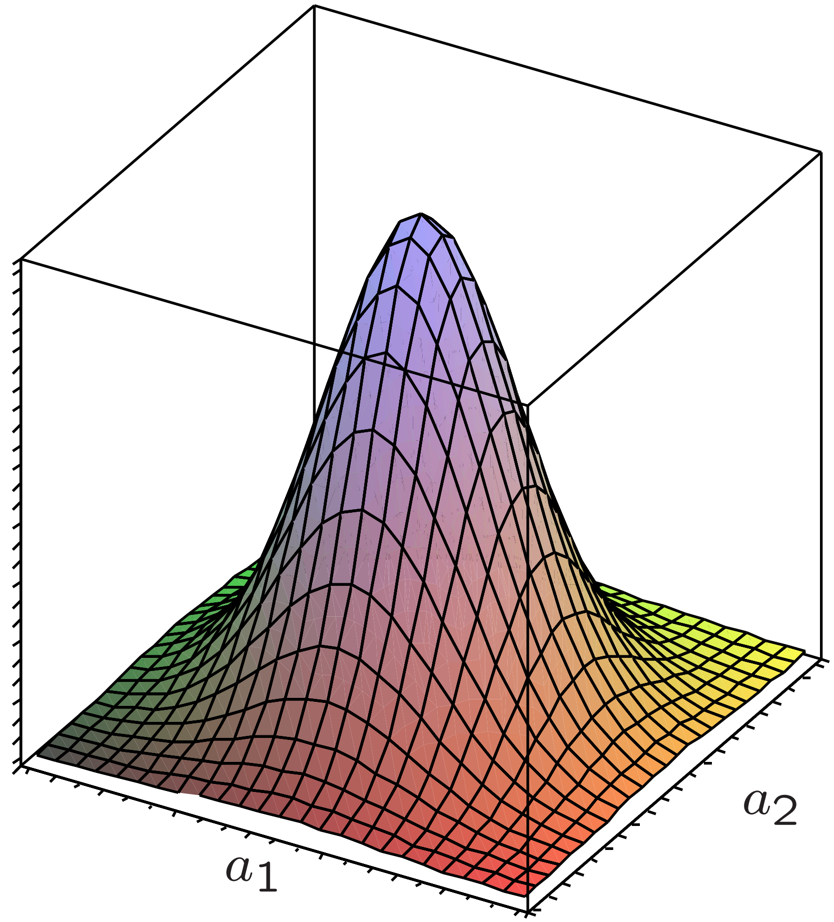
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\,da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \qquad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2,\ |a|^2 := a_1^2 + a_2^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrtisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf** $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe:

Berechne $\mathbf{P}(|Z|^2 > b)$

für ein auf $\mathbb{R}^2$ standard-normalverteiltes Z

und $b > 0$.

Anders formuliert:

Berechne $\mathbf{P}(Z \in A)$

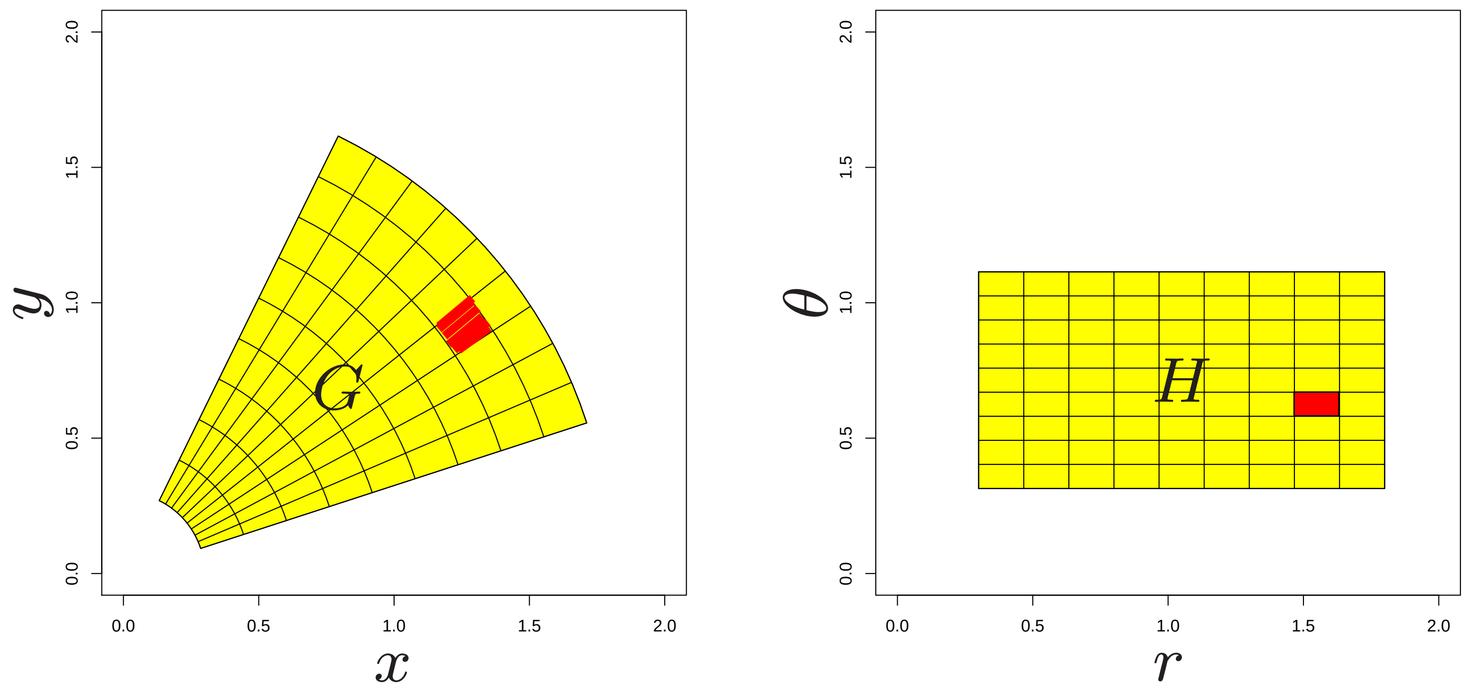
mit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > b\}$

Zu berechnen ist also

$$\frac{1}{2\pi} \iint_A e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint\limits_G e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = \iint\limits_H e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$



Speziell mit $G := A$ und $H := (\sqrt{b}, \infty) \times [0, 2\pi)$:

$$\iint\limits_{\{(x,y):x^2+y^2>b\}} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\sqrt{b}}^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi(-e^{-r^2/2}) \Big|_{\sqrt{b}}^{\infty} = 2\pi e^{-b/2}.$$

$$\mathbf{P}(|Z|^2 > b) = \mathbf{P}(Z \in A)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_A e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = e^{-b/2}.$$

$|Z|^2$ ist Exp($\frac{1}{2}$)-verteilt!

Eine Folgerung aus der Rotationssymmetrie

(vgl Buch S. 71)

Z_1 und Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt.

Wir wollen einsehen, dass dann auch

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$$

standard-normalverteilt ist.

Dafür gibt es ein schönes geometrisches Argument.

Sei $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^2$.

Wir fassen das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die Koordinaten des zufälligen Vektors

$$\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + Z_2 \vec{e}_2$$

und stellen fest:

- Z_1 ist die Koordinate von $\vec{Z}$ bgl. des Einheitsvektors $\vec{e}_1$.
- $\dfrac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}}$ ist die Koordinate von $\vec{Z}$ bgl. des Einheitsvektors
$$\vec{u}_{\mathrm{diag}} := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2.$$
- Die Verteilung von $\vec{Z}$ ist rotationssymmetrisch

Also ist Z_1 so verteilt wie $\frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}}$.

Und was dem Einheitsvektor $\vec{u}_{\mathrm{diag}}$ recht ist,

ist jedem Einheitsvektor $\vec{u} = \tau_1\vec{e}_1 + \tau_2\vec{e}_2$ billig !

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$$Y := \tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2 \quad \text{ist} \quad \text{N(0, 1)-verteilt.}$$

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + Z_2 \, \vec{e}_2$

zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2$.)

Eine wichtige Folgerung hieraus:

Die Summe von

unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen

ist wieder normalverteilt.

Denn für Z_1, Z_2 unabhängig und $N(0, 1)$-verteilt gilt:

$$\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_2 \right)$$

ist N$(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt.

und

$$(\sigma_1 Z_1 + \mu_1) + (\sigma_2 Z_2 + \mu_2) = (\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2) + (\mu_1 + \mu_2).$$